2020—2021（1）《高等数学 D》试卷 A　标准答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1． C．　**2．** **A**．　**3．** B．　**4．** D．　**5．** C．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6． $\underline{e^{-2}}$．　7、$\underline{\sqrt{3}}$．　8、$\underline{y=-2x+4\sqrt{2}}$．　9、$\underline{dx+edy}$．　10、$\underline{\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy}$．

三、计算题（每小题 7 分，共 49 分）

11.解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

12.解：方程两边对 x 求导，得：

$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，整理得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-y}{e^y+x}$．

当 $x=0$ 时，代入原方程可得 $y=1$.所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{e}.$$

13. 解：$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx+\int_1^2 1dx$

$$=\int_0^1 xde^x+x\Big|_1^2=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx+1=e-e^x\Big|_0^1+1=2$$

14. 解：$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$$=\int 1dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=x-\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$=x-\ln(1+e^x)+C.$$

15. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2.$$

16. 解：$\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x}{y^2}dy=\int_1^2 (x^2-1)dx$

$$=(\frac{x^3}{3}-x)\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

17. 解：由题令 $P(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},Q(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1},$

则 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

有 $y=\dfrac{\frac{4}{3}x^3+C}{x^2+1}$

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

18.

解：$y'=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}=0$，得 $x=0$； $y''=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$

单调递增区间：$(0,1)$；单调递减区间：$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$；

极小值：$y(0)=-1$

凹区间：$(-\dfrac{1}{2},1)$，$(1,+\infty)$；凸区间：$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$；拐点：$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{8}{9})$

19. 解： (1) $A=\int_0^1(1+x^2-2x)dx=(x+\dfrac{x^3}{3}-x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$

(2) $V=\int_0^1\pi[(1+x^2)^2-(2x)^2]dx=\dfrac{8}{15}\pi$

五、证明题（共 5 分）

20. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：(1) 若 $f(1)=f(2)=4$，结论显然成立.

(2) 若 $f(1)\neq f(2)$，则 $f(1)$，$f(2)$ 二者中会有一个大于 4，一个小于 4

又 $\because$ $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续

$\therefore \exists\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=4$

$\because$ $f(3)=4$，且知函数 $f'(x)$ 在 $(\eta,3)$ 上存在，函数 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上连续，

$\therefore$ 根据罗尔定理：至少存在一点 $\xi\in\left(\eta,3\right)\subset(0,3)$，

使得 $f'(\xi)=0$.