2020—2021（1）《概率论》试卷(A)　　标准答案

一、填空题（每空 3 分，共 21 分）

1． 0.8；　　**2．** $P(X=-1)=0.3, P(X=2)=0.5, P(X=5)=0.2$ ；

3． 42, 85 ；　　**4．** **1**；　　**5．** $\frac{4}{9}$；　　**6．** $\frac{3}{4}$；

二、选择题（每小题 2 分，共 14 分）

1．C； 2．B； 3．A； 4．C； 5．D； 6．A ； 7．C.

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1． 解：$B=\{\text{能发芽}\}$　　$A_i=\{\text{取的是第 } i \text{ 等品}\}$　$\mathrm{i}=1,2,3,4$,

$$P(A_1)=0.2, P(A_2)=0.7, P(A_3)=0.1$$

$$P(B|A_1)=0.9, P(B|A_2)=0.7, P(B|A_3)=0.3$$

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.2\times0.9+0.7\times0.7+0.1\times0.3=0.7$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.49}{0.7}=0.7$$

2．解：（1）

X	1	2	3	4
P	0.1	0.3	0.2	0.1

（2）$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.4 & 1\le x<2\\ 0.7 & 2\le x<3\\ 0.9 & 3\le x<4\\ 1 & 4\le x\end{cases}$$

（3）$EX=1\times0.4+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1=2$

$EX^2=1^2\times0.4+2^2\times0.3+3^2\times0.2+4^2\times0.1=5$　$DX=5-2^2=1$

3．　解：（1）由 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos xdx = 1$ 可得 $2a=1$，即 $a=\dfrac{1}{2}$

（2）X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，所求概率即

$$P(0<X<\frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

（3）$E(X+1)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\dfrac{1}{2}\cos xdx=1$

4．　解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X-1\le y)=P(X\le\ln(y+1))=\int_{-\infty}^{\ln(y+1)} f_X(x)dx$ -

$$=\begin{cases}0, & y<0;\\ \dfrac{1}{16}\ln^2(y+1), & 0\le y<e^4-1;\\ 1, & e^4-1\le y.\end{cases}$$

于是 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(y+1)}{8(y+1)}, & 0<y<e^4-1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

四、综合题（每小题 10 分，共 20 分）

1．解：（1）$S=\int_0^1[x-(-x)]dx=x^2|_0^1=1$

所以 $f(x)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-x}^{x}1dy=2x$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当 $-1\le y<0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-y}^{1}1dx=1+y$

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{y}^{1}1dx=1-y$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1\le y<0\\ 1-y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

由于 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以不独立。

（3）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xydy=\int_0^1 0dx=0$

2.

解：（1）$\alpha=2/9,\beta=1/9$；

（2）

X	1	2
P	$1/3$	$2/3$

，

Y	1	2	3
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

；

（3）.

Z	2	3	4	5
P	$1/6$	$4/9$	$5/18$	$1/9$

五、证明题（1 小题，共 5 分）

证明：$D(X-Y)=E(X-Y)^2-[E(X-Y)]^2$

$=E(X^2)+E(Y^2)-2E(XY)-[E(X)]^2-[E(Y)]^2+2E(X)\cdot E(Y)$

$=D(X)+D(Y)-2[E(XY)-E(X)\cdot E(Y)]$