2020—2021（1）《概率论与数理统计》试卷(A)　　标准答案

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1．B；　2．D；　3．A；　4．B；　5．D;　6．A；　7．D；　8．B；　9．C；　10．C

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．0.82；　2．0.25；　3．9.6；　4．0.5；　5．$\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-1)^2}{50}}$

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1．解：设 $A_i=\{$放入乙盒的螺钉中有 i 只正品$\}$ $(i=1,2)$，

$B=\{$乙盒中取出的两只螺钉是一只正品、一只次品$\}$，

$$P(A_1)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2},P(B\mid A_1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15};$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2},P(B\mid A_2)=\frac{C_1^1C_5^1}{C_6^2}=\frac{1}{3}$$

由全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$$

2. 解：（1）二人投中次数相等的概率。

记 X 表示甲三次投篮中投中的次数；　$X\sim B(3,1/3)$

Y 表示乙三次投篮中投中的次数；　$Y\sim B(3,1/2)$

由于甲、乙每次投篮独立，且彼此投篮也独立。

$$\begin{aligned}P(X=Y)&=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)\\&\quad+P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=3)\\&=(2/3)^3\cdot(1/2)^3+\left[C_3^1\times(1/3)\times(2/3)^2\right]\times\left[C_3^1\times(1/2)\times(1/2)^2\right]\\&\quad+\left[C_3^2\times(1/3)^2\times(2/3)^1\right]\times\left[C_3^2\times(1/2)^2\times(1/2)^1\right]+(1/3)^3\times(1/2)^3\\&=63/216\end{aligned}$$

（2）甲比乙投中次数多的概率

$$P(X>Y)=1/18+1/36+1/12+1/216+1/72+1/72=43/216$$

3.解：（1）$\because\ \int_0^{\pi/2}dx\int_{-\pi/2}^{0}k\cos(x+y)dy=1 \qquad \therefore\ k=1/2$

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\pi/2}^{0}\dfrac{1}{2}\cos(x+y)\,dy=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x), & 0\le x\le \pi/2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{0}^{\pi/2}\dfrac{1}{2}\cos(x+y)\,dx=\dfrac{1}{2}(\cos y-\sin y), & -\pi/2\le y\le 0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（3）$P(X-Y\le\frac{\pi}{2})=\int_0^{\pi/2}dx\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}$

4. 解：（1）矩估计：

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}；\quad \theta=-\frac{E(X)}{E(X)-1},$$

则矩估计量 $\hat{\theta}=-\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1}=-\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

(2) 极大似然估计：设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是相对于样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的一个样本值

极大似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln(x_1x_2...x_n)$，$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

极大似然估计量 $\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

5. 解：建立检验假设 $H_0: \mu \geq \mu_0$=269, $H_1: \mu < 269$,

选择统计量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

由α=0.05, 查 z 分布表得 $z_{0.05} = u_{0.05} = 1.65$，

从而拒绝域为 $z < -z_{0.05} = -1.65$

由于 $\overline{x}$=268，$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{268 - 269}{2 / \sqrt{25}} = -2.5 < -1.65$

故应拒绝 H_0，即该盒装饼干有不实广告行为。

四、证明题（5 分）

6. 证明： $\because A_i \subseteq A(i=1,2,3)$, 故 $A_1A_2A_3 \subseteq A$, 有 $P(A_1A_2A_3) \leq P(A)$

$\because P(CB) = P(C) + P(B) - P(C+B) \geq P(C) + P(B) - 1$

有 $P[A_1A_2A_3] \geq P(A_1A_2) + P(A_3) - 1 \geq (P(A_1) + P(A_2) - 1) + P(A_3) - 1$

故 $P(A) \geq P(A_1A_2A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$