2020—2021（1）《高等数学 A1/B1》试卷(A)　　标准答案

一、选择题（每小题 3 分，共 27 分）

1．B;　2．C;　3．C;　4．D;　5．C;　6．D;　7．B;　8．B;　9． A;

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

10. $\underline{y=2a}$ ；　11. $\underline{e^2}$ ；　12. $\underline{x\cos x-\sin x+C}$；　13. $\underline{e-1}$；　14. $\underline{\tan\left(x+C\right)}$；

三、计算题（每小题 9 分，共 27 分）

15．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\left(e^x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+O\left(x^3\right)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

$$\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

$$\overset{(3)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

16．解：$\because f'\left(x^2\right)=-2x^2+\dfrac{1}{1-x^4}$　　$\therefore f'\left(x\right)=-2x+\dfrac{1}{1-x^2}$

$$\therefore f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\left(-2x+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$\therefore f\left(x\right)=\int\left(-2x+\frac{1}{2\left(1-x\right)}+\frac{1}{2\left(1+x\right)}\right)dx$$

$$\therefore f\left(x\right)=-x^2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

$\because f\left(0\right)=0$　　$\therefore f\left(x\right)=-x^2+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

17. 解：$I'(x)=\int_1^{e^x}(t-e)\ln t dt=(e^x-e)x\cdot e^x$

令$I'(x)=(e^x-e)x\cdot e^x=0$

得驻点$x=0$和$x=1$，无不可导点

$\because I''(x)=e^x x\cdot e^x+(e^x-e)e^x+(e^x-e)xe^x$

$\therefore I''(0)=1-e<0, x=0$极大值点

$\therefore I''(1)=e^2>0, x=1$极小值点.

*利用分布积分计算出$I(x)$再求导也可.

四、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

18. 解：$y=\dfrac{x-3}{2}$等价于$x=2y+3$

由$\begin{cases}x=2y+3\\x=y^2\end{cases}\Rightarrow y^2=2y+3\Rightarrow(y-3)(y+1)=0$

得 $y=-1$和$y=3$

则面积 $S=\int_{-1}^{3}(2y+3-y^2)dy$

$$=\left[y^2+3y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3}=8+12-\left(9+\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{3}.$$

19. 解：$V=\pi\int_0^{2\pi}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}x\sin^2 xdx$

$$=\pi\int_0^{2\pi}x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{2\pi}xdx-\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2\pi^2-\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2\pi^2-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}xd\sin 2x\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2\pi^2-\frac{1}{2}\left(x\sin 2x\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin 2xdx\right)\right)\ =\pi^3$$

五、证明题（**11** 分）

20.（1）证：由已知：$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=0$，且函数为初等函数，因此在区间$[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$,$[5,6]$上满足罗尔中值定理，

$\therefore$ 至少$\exists\zeta_1\in(1,2)$，$\exists\zeta_2\in(2,3)$,L ，$\exists\zeta_5\in(5,6)$ 使得 $f'(\zeta_k)=0(k=1,...,5)$，

$\because f(x)$是最高次为6次的多项式，

$\therefore f'(x)$是最高次为5次的多项式，最多有 5 个根.

$\therefore f'(x)=0$有且仅有5个

同样在区间$[\zeta_k，\zeta_{k+1}],k=1,...,4$ 上，函数 $f'(x)$ 同样适用罗尔中值定理

$\therefore$ 至少$\exists\eta_k\in(\zeta_k,\zeta_{k+1}),k=1,...,4$

使得 $f'(\eta_k)=0(k=1,...,4)$

$\because f'(x)$是最高次为5次的多项式

$\therefore f''(x)$为最高次4次的多项式，最多有4个根

$\therefore f''(x)$有且仅有4个根.

（2）当$b>a>0$时，证明不等式：$2ae^{a^2}\le\dfrac{e^{b^2}-e^{a^2}}{b-a}\le 2be^{b^2}$.

证: 设函数 $f(x)=e^{x^2},x>0$ 由于是初等函数$\therefore$ 在区间$[a,b]$上满足 **Lagrange** 中值定理, 即$\exists\zeta\in(a,b)$，$\dfrac{e^{b^2}-e^{a^2}}{b-a}=2\zeta e^{\zeta^2}$

$\because f'(x)=2xe^{x^2}$在$x>0$上单调递增

$\therefore 2ae^{a^2}<2\zeta e^{\zeta^2}<2be^{b^2}$

$\therefore 2ae^{a^2}(b-a)\le e^{b^2}-e^{a^2}\le 2be^{b^2}(b-a)$.