

# 2020—2021 (1)《高等数学 C1》试卷(A) 标准答案

## 一、选择题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. A    2. B    3. **D**    4. C    5. B    6. B    7. C    8. A    9. D    10. D.

## 二、填空题(每空 3 分, 共 15 分)

1.  $y = e^{-2}$ ;    2.  $3\ln^2 3x dx$ ;    3.  $\frac{\pi}{4} + 1$ ;    4.  $\frac{\pi}{2}$ ;    5.  $\frac{2\sin \xi}{\xi}$

## 三、计算题(每小题 9 分, 共 45 分)

$$\begin{aligned} 1. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. 解: (1) 将  $x=0$  代入方程中可得:  $f(0)=1$ ;

$$\text{方程两边对 } x \text{ 求导: } -\sin(xy) \cdot (y + xy') + \frac{y'}{y} - 1 = 0$$

将  $x=0$ ,  $y=1$  代入上式可得:  $f'(0)=1$ ;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[f(\frac{2}{n}) - f(0)]}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2$$

$$\begin{aligned} 3. \text{解: } \int e^x \sin x dx &= -\int e^x d \cos x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

$$\text{移项得: } 2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + C_1.$$

两边同除以 2, 并记  $\frac{1}{2}C_1 = C$ , 得所求积分为

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

4. 解: 定义域:  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, f''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

当  $x < 0$  时,  $f''(x) > 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f''(x) < 0$ ;

故凹区间为  $(-\infty, 0)$ , 凸区间为  $(0, +\infty)$ ;

拐点为  $(0, 0)$ .

5. 解: 方程化为:  $y' - \frac{1}{x}y = xe^{-x}$

方程两边同除以  $x$ , 则方程可化为:

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = e^{-x}$$

积分化简可得通解:  $y = x(-e^{-x} + C)$

#### 四、应用题 (每小题 10 分, 共 10 分)

6. 解: (1) 曲线  $y = \sqrt{e^x - 1}$  与  $x$  轴交点  $(0, 0)$ ,

$$\text{面积 } A = \int_0^1 \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = 2(\sqrt{e-1} - \arctan \sqrt{e-1});$$

$$(2) \text{ 体积 } V = \int_0^1 \pi(e^x - 1) dx = \pi(e - 2).$$